様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月 １９ 日現在

機関番号：３２２０１
研究種目：若手研究
研究期間：2020～2023
課題番号：２０Ｋ１４３１８

研究課題名（和文）有限生成群のなす空間上における増大度およびスペクトル半径の連続性の研究

研究課題名（英文）On continuity of growth rates and spectral radii on the space of marked groups

研究代表者
雪田　友成（Yukita, Tomoshige）

足利大学・工学部・講師

研究者番号：８０８４３９０３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：コクセター系の全体を標識付き群の空間の部分空間として考えることで、位相的性質と増大度の連続性の研究を行った。結果として、コクセター系の全体が標識付き群の空間における閉集合であり、増大度は連続関数となることを明らかにした。増大度の連続性の応用として、コクセター系の増大度の数論的性質についてナーブのオイラー標数との関連についての研究を行った。結果として、２次元コクセター系の増大度はナーブのオイラー標数が正ならばPisot数であり、0ならばSalem数となることを明らかにした。これらの結果はいずれもこれまでの双曲離散鏡映群の増大度に関する結果を拡張したものである。

研究成果の学術的意義や社会的意義
有限生成群の増大度関数や増大度についての研究は、MilnorのRiemann多様体と基本群の関係についての研究から始まり、Gromovらにより行われた。特に、多項式増大を持つ群は有限指数のベキ零部分群をもつというGromovの多項式増大定理は好例である。本研究では、コクセター系に焦点を当てて増大度についての研究を行い、特に標識付き群を変数とする関数としての連続性や数論的性質について、双曲幾何で得られてきた結果をコクセター系に一般化したものである。

研究成果の概要（英文）：We considered the set of Coxeter systems with N generators as a subspace of the space of marked groups. Then we showed that the space of Coxeter systems is compact and the growth rates are continuous as a function on the space. As an application of this result, we studied arithmetic nature of the growth rates of Coxeter systems. We showed that if the Euler characteristic of the nerve of a 2-dimensional Coxeter system is positive (resp. zero), then the growth rate is a Salem number (resp. Pisot number). These results are extensions of the previous results on the growth rates of discrete hyperbolic reflection groups.

研究分野：幾何学的群論

キーワード：コクセター系　増大度　Salem数　Pisot数　Perron数　双曲幾何　双曲多面体

１．研究開始当初の背景

有限生成群 G と有限生成系 $S \subset G$ を取る。このとき、$x = s_1 \cdots s_k$ $(s_i \in S \cup S^{-1})$ となる k の最小値を $|x|_S$ で表して語の長さという。語の長さが n 以下である G の元の個数を $b_{(G,S)}(n)$ で表して (G,S) の増大度関数という。語の長さを用いて G 上に距離を定める時、増大度関数は単位元から半径 n の距離球がどれくらいの早さで増大するかを表している。増大度関数が高々多項式関数であるか少なくとも指数関数であるかによって、群 G は多項式増大をもつまたは指数増大をもつという。増大度関数は Milnor の 1968 年の論文で Riemann 多様体の基本群と曲率との関係を調べた論文で導入され、Gromov によって詳細な研究がなされた。特に、1981 年に Gromov は多項式増大をもつ群が有限指数のベキ零部分群を含むことを示した。この結果を受けて、群の増大度関数が幾何学的群論において注目を浴びるようになった。

多項式増大をもつ群ではなく、指数増大をもつ群を考えたとき、興味深い対象として双曲オービフォルドのオービフォルド基本群がある。双曲幾何に現れる有限生成群の増大度関数について、Cannon, Wagreich, Floyd らは双曲曲面の基本群や、双曲多角形の辺に関する鏡映で生成される離散鏡映群の増大度関数を研究した。彼らは、増大度関数についての母関数 $\sum_{n\geq 0} b_{(G,S)}(n)z^n$ が整数係数有理関数 $f_{(G,S)}(z) = p(z)/q(z)$ として表されることを明らかにし、収束半径に対応する $q(z)$ の零点が Salem 数や Pisot 数と呼ばれる実代数的整数となることを示した。この収束半径に対応する点は Cauchy-Hadamard の公式から収束半径の逆数として表されることが知られており、それを (G,S) の指数増大度または単に増大度という。Cannon, Wagreich, Floyd らの結果を 2 次元双曲離散鏡映群に限って述べると次のような形になる：コンパクトな双曲多角形に関する離散鏡映群の鏡映生成系に関する増大度は Salem 数であり、非コンパクトな場合には Pisot 数となる。特に、非コンパクトな双曲多角形に関する離散鏡映群の増大度に対して、コンパクトな双曲多角形に関する離散鏡映群の列で増大度が下から収束するものが存在する。このように、群と生成系により定まる量である増大度の数論的性質は群の持っている幾何学的情報により決定されることがわかっていた。そこで、これらの増大度の研究に関してコクセター群に対して同様の研究を行うというのは本研究の背景にあった問題である。

２．研究の目的

有限生成群の増大度の性質は作用する空間の幾何学や作用に関する基本領域の幾何に影響を受けている。例えば、Cannon, Wagreich, Floyd らの研究は 2 次元双曲離散鏡映群の増大度関数を双曲平面の多角形によるタイル張りについての組み合わせの問題に帰着することで行われた。そこで、離散鏡映群の群論的一般化であるコクセター群に対して、作用する空間として Davis 複体と呼ばれる単連結な CAT(0)空間を考え、その基本領域の幾何学的情報から増大度の性質がどのように決定されるかを目的とした研究を行った。

３．研究の方法

コクセター群の増大度の数論的性質に関する基本的な結果として、Cannon，Wagreich，Floyd らによる 2 次元双曲離散鏡映群の増大度を調べたものと 3 次元双曲離散鏡映群の増大度を調べたものが知られている。これらの結果の中でも興味深いものとして、１．双曲多角形や双曲多面体の変形と増大度の収束との対応に関する結果、２.増大度の数論的性質と双曲多角形および双曲多面体の対応に関する結果の２つがある。研究代表者は結果１および結果２を双曲離散鏡映群とは限らないコクセター群について考察することから始めた。

１について：双曲幾何学の枠組みでは離散鏡映群の基本領域となる双曲多面体が全て(理想境界も込めて)双曲空間に含まれるので収束に関して議論することは比較的容易である。一方で、一般のコクセター群の場合には、それらが鏡映として作用する Davis 複体の間の収束を考えて議論することは難しい。そこで、基本領域の収束について議論する代わりに群と生成系の組自体の収束について考察した。Grigorchuk により 1984 年に標識付き群の空間と呼ばれる、群と生成

系の組全体からなる距離空間が導入された。この空間において二つの群と生成系の組 $(G,S),(H,T)$ が近いとは、それぞれのケーリーグラフにおける単位元中心の距離球について十分大きい半径を考えてもグラフ同型であるということである。このことから、前述の双曲多面体の収束は、標識付き群の空間において対応する離散鏡映群の収束列を定めることがわかる。そこで、コクセター群の収束を標識付き群の空間で考えることにより、増大度の連続性についての研究を行った。これと合わせて、ケーリーグラフ上の単純ランダムウォークに関するスペクトル半径についても連続性の研究を行った。

２について：コクセター群は Davis 複体に鏡映として作用しており、離散鏡映群の場合の基本領域に対応するものとしてこの作用に関する基本領域を考えることができる。この基本領域の境界をコクセター群のナーブという。コクセター群のナーブは定義関係式から簡単に組み合わせ構造を記述することができるという利点がある。実際に、コンパクト双曲多面体に関する離散鏡映群のナーブは多面体の境界そのものが現れる。特に、コンパクト双曲多面体に関する離散鏡映群のナーブは多面体の境界であるから球面と同相である。そこで、コクセター群のナーブが球面と同相でない場合などに増大度の数論的性質の研究を行った。

４．研究成果

１について：N元生成コクセター群の全体 $\mathcal{C}_N$ を標識付き群の空間における部分空間と考えたときの位相についての研究を行い、$\mathcal{C}_N$ は閉集合であることを明らかにした。特に、コクセター群の極限はコクセター群であり、標識付き群の空間はコンパクトであるから $\mathcal{C}_N$ もまたコンパクトである。より詳細に部分空間を調べることで、球面またはユークリッド離散鏡映群として実現されるコクセター群の全体とそれ以外のコクセター群の全体がそれぞれ閉集合であることも明らかにすることができた。このことは、指数増大をもつコクセター群の極限もまた指数増大をもつ、ということを意味している。群 G が指数増大を持つ場合でも、標識付き群の空間における収束列 (G,S_k) の極限として得られる群が指数増大をもたないということはあり得る。この結果はコクセター群(より正確にはコクセター系)の場合には、それはないということを意味している。
コクセター系の空間 $\mathcal{C}_N$ が閉集合であり、指数増大をもつときの極限も指数増大をもつことが分かったので、これらと Steinberg の公式を用いることで増大度の連続性を明らかにした。この結果は、これまでの Floyd や Kolpakov らによる双曲離散鏡映群の増大度の収束に関する結果を幾何学的群論の枠組みで一般化したものになっており、特に増大度の数論的性質を調べる際のツールとなっている（後述の２についての結果）。

２について：コクセター系が d 次元であるとは、Davis 複体の単体複体としての次元が d となることである。１次元コクセター系は位数 2 の群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の有限個の自由積として表される。この場合には増大度は整数であり、自由積の個数を用いて簡単に表すことができる。本研究では、２次元コクセター系の増大度の数論的性質についての研究をスイス Fribourg 大学の Naomi Bredon 氏と共同で行った。２次元コクセター系というのはユークリッド平面や双曲平面の離散鏡映群を含むクラスとなっており、先行研究でのアイデアをどのようにナーブの言葉で書き換えるか、という点がボトルネックであった。２次元コクセター系のナーブは１次元の単体複体であり、グラフとなる。このとき、グラフのオイラー標数 χ（＝頂点数 − 辺数）により増大度の数論的性質がコントロールされることを明らかにした。より具体的には、(i) $\chi > 0$ の場合には増大度は Pisot 数となり、(ii) $\chi = 0$ の場合には Salem 数となる。また、$\chi < 0$ の場合には増大度が Perron 数であるような２次元コクセター系の族が無限に存在していることを明らかにしており、一般に Perron 数となることを予想している。また、１についての結果と関連して、(i)において $\chi > 0$ となるような２次元コクセター系の増大度は $\chi = 0$ である２次元コクセター系の増大度の下からの極限として表すことができることも明らかにしている。これらの結果は Cannon,Wagreich,Floyd らによる２次元双曲離散鏡映群の増大度に関する結果の拡張となっており、双曲多角形がコンパクトな場合は $\chi = 0$ の場合に対応して、非コンパクトな場合が $\chi > 0$ に対応している。２次元の場合の研究の延長として、３次元コクセター系についても同様の研究を行った。３次元コクセター系のナーブは２次元単体複体であり、組み合わせ構造がグラフのように簡単には表せない。そこで、ナーブとして擬多様体と呼ばれる単体複体になる場合について考察した。この場合でもオイラー標数 χ (＝頂点数 − 辺数+面数)により増大度の数論的性質が決定されることを部分的に明らかにしている。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Yukita Tomoshige	４．巻 18
２．論文標題 On the continuity of the growth rate on the space of Coxeter systems	５．発行年 2024年
３．雑誌名 Groups, Geometry, and Dynamics	６．最初と最後の頁 109～126
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/GGD/741	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Naomi Bredon and Tomoshige Yukita	４．巻 -
２．論文標題 Coxeter systems with 2-dimensional Davis complexes, growth rates and Perron numbers	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Algebraic & Geometric Topology	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計16件（うち招待講演　10件／うち国際学会　4件）

１．発表者名 雪田友成
２．発表標題 双曲多面体の変形とコクセター系の空間について
３．学会等名 N-KOOK seminar（招待講演）
４．発表年 2022年

１．発表者名 雪田友成
２．発表標題 Arithmetic nature and continuity of growth rates of Coxeter systems
３．学会等名 Prossimi seminari del Dipartimento di matematica（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2022年

１．発表者名 雪田友成
２．発表標題 コクセター系のnerveの組み合わせと増大度の数論的性質について
３．学会等名 早稲田双曲幾何幾何学的群論セミナー
４．発表年 2022年

１．発表者名 雪田友成
２．発表標題 2次元コクセター系のオイラー数と増大度の数論的性質
３．学会等名 東工大複素解析セミナー
４．発表年 2022年

１．発表者名 雪田友成
２．発表標題 コクセター系の指数増大度とSalem数およびPisot数について
３．学会等名 第６回幾何学的群論ワークショップ（招待講演）
４．発表年 2022年

１．発表者名 雪田友成
２．発表標題 コクセター系のnerveのオイラー標数と増大度
３．学会等名 2022年度「リーマン面・不連続群論」研究集会（招待講演）
４．発表年 2022年

1．発表者名 雪田友成
2．発表標題 Convergent sequences of Coxeter groups and its growth rates
3．学会等名 2020年度「リーマン面・不連続群論」研究集会（招待講演）
4．発表年 2021年

1．発表者名 雪田友成
2．発表標題 局所剛性を持つ5次元双曲離散鏡映群
3．学会等名 日本数学会 ・2021年度年会
4．発表年 2021年

1．発表者名 雪田友成
2．発表標題 コクセター群の増大度の連続性
3．学会等名 日本数学会 ・2021年度年会
4．発表年 2021年

1．発表者名 雪田友成
2．発表標題 Local rigidity of right-angled Coxeter groups in hyperbolic 5-space
3．学会等名 RIMS Workshop Geometry of discrete groups and hyperbolic spaces（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2021年

1．発表者名
雪田友成

2．発表標題
Growth rates and spectral radii of Coxeter groups

3．学会等名
World of Group Craft（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2021年

1．発表者名
雪田友成

2．発表標題
Topology of the space of Coxeter systems and growth rates

3．学会等名
奈良双曲幾何セミナー

4．発表年
2021年

1．発表者名
雪田友成

2．発表標題
Continuity of the growth rate on the space of Coxeter groups

3．学会等名
Geometric Group Theory in East Asia（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2020年

1．発表者名
雪田友成

2．発表標題
Rigidity of hyperbolic reflection groups in dimension 4 and 5

3．学会等名
第63回函数論シンポジウム（招待講演）

4．発表年
2020年

1．発表者名 雪田友成
2．発表標題 Convergent sequences of Coxeter groups and its growth rates
3．学会等名 2020年度「リーマン面・不連続群論」研究集会（招待講演）
4．発表年 2021年

1．発表者名 雪田友成
2．発表標題 コクセター群の空間と増大度の連続性
3．学会等名 早稲田双曲幾何幾何学的群論セミナー
4．発表年 2020年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関